ТОЖДЕСТВА ИСТИННЫЕ НА РЕШЕТКАХ ПОДПОРЯДКОВ

Холов Миржамол Нарзуллаевич, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет Кафедра: Дискретной математики ифнорматики Аспирант 1-курса. телефон +7(999)322 −09 –01
Электронная почта: m.kholov@g.nsu.ru

Ключевые слова: решетка подпорядков, частично упорядоченное мно- жество, атом, неразложимый элемент, цепь, тождества, модулярная ре- шетка, дистрибутивная решетка, n-дистибутивность алгебраические свой- ства, решетка M3 (диамант), решетка N5 (пентагон).

Аннотация: В работе даны необходимые определения и изложены некоторые результаты, касающиеся многообразия, порожденного решет- кой L_4 подпорядков четырехэлементной цепи. В частности, показано, что сама решетка L_4 не является модулярной, и найдены некоторые нетри- виальные тождества, истинные в этой решетке.

Известно [1], что класс решеток подпорядков является универсаль- ным, т. е. любую решетку можно вложить в решетку подпорядков под- ходящего частично упорядоченного множества. Важную роль сыграли решетки подпорядков при доказательстве вложимости решеток в решет- ки подполугрупп. Известны характеризации решеток, вложимых в ре- шетки подпорядков для конечных частично упорядоченных множеств.

Ограничения на частично упорядоченные множества приводят и к другим интересным результатам. Например, известно, что класс реше- ток, вложимых в решетки подпорядков частично упорядоченных мно- жеств ограниченной конечной высоты, является конечно базируемым многообразием. В [2] показано, что конечно базируемым многообрази- ем является квазимногообразие, порожденное решеткой L_3 подпорядков 3-элементной цепи.

Задачей данной работы является поиск обобщений результатов работы [2] с целью изучения строения решетки подпорядков 4-элементной цепи и свойств ее (квази)эквациональной теории.

IDENTITIES TRUE ON SUBORDER LATTICES

Kholov Mirzhamol Narzulaevich, Novosibirsk National Research State University
Department of “Discrete Mathematics and Informatics”
1st level postgraduate student
Telephone number: +7(999)322 −09 –01, e-mail: m.kholov@g.nsu.ru

Keywords: suborder lattice, partially ordered set, atom, indecomposable element, chain, identities, modular lattice, distributive lattice, n-distributivity, algebraic properties, M3 (rhombus) lattice, N5 (pentagon) lattice.

Abstract: In this paper, we provide the necessary definitions and present some results concerning the variety generated by the Z_4 suborder lattice of a four-element chain. In particular, we show that the Z_4 lattice itself is not modular, and we find some nontrivial identities that are true on this lattice.

It is known [1] that the class of suborder lattices is universal, i.e., Any lattice can be embedded in the suborder lattice of a suitable partially ordered set. Suborder lattices played an important role in proving the embeddability of lattices in subsemigroup lattices. Characterizations of lattices embeddable in suborder lattices of finite partially ordered sets are known. Restrictions to partially ordered sets also lead to other interesting results. For example, it is known that the class of lattices embeddable in suborder lattices of partially ordered sets of bounded finite height is a finitely based variety. In [2], it was shown that the quasivariety generated by the Z_3 suborder lattice of a three-element chain is a finitely based variety. The goal of this paper is to find generalizations of the results of [2] for studying the structure of the suborder lattice of a four-element chain and the properties of its (quasi)equational theory.

PASTKI TARTIBLI PANJARALARDA TO'G'RI BO'LGAN AYNIYATLAR

Xolov Mirjamol Narzulaevich, Novosibirsk milliy tadqiqot davlat universiteti "Diskret matematika va informatika kafedrasi"1-bosqich aspiranti

Telefon: +7(999)322 −09 −01

Pochta: m.kholov@g.nsu.ru

Kalit so'zlar: Pastki tartibli panjara, qisman tartiblangan to'plam, atom, parchalanmaydigan element, zanjir, ayniyatlar, modulli panjara, taqsimlovchi panjara, n-distributivlik , algebraik xususiyatlar, M3 (olmos) panjara, N5 (beshburchak) panjara.

Annotatsiya: Ushbu maqolada zarur ta'riflar keltirilgan va to'rt elementli zanjirning Z_4 pastki tartiblari tomonidan hosil qilingan xilma-xillikka oid ba'zi natijalar keltirilgan. Xususan, Z_4 panjarasining o'zi modulli emasligi va bu panjarada ba'zi trivial bo'lmagan ayniyatlar topilganligi ko'rsatilgan.

Ma’lumki, [1] Pastki tartibli panjaralar klassi universaldir, ya’ni har qanday panjara mos qisman tartiblangan to’plamning pastki tartibli panjarasiga joylashtirilishi mumkin. Pastki tartibli panjaralar kichik yarim guruhli panjaralarda panjaralarning joylashtirilishini isbotlashda muhim rol o’ynadi. Cheklangan qisman tartiblangan to’plamlar uchun pastki tartibli panjaralarga joylashtiriladigan panjaralarning tavsiflari ma’lum. Qisman tartiblangan to’plamlarga cheklovlar boshqa qiziqarli natijalarga ham olib keladi. Masalan, cheklangan chekli balandlikdagi qisman tartiblangan to’plamlarning pastki tartibli panjaralariga joylashtiriladigan panjaralar sinfi chekli asosli xilma-xillik ekanligi ma’lum. [2] da 3 elementli zanjirning L_3 pastki tartibli panjarasi tomonidan hosil qilingan Kvazi-ko’plik chekli asosli xilma-xillik ekanligi ko’rsatildi. Ushbu ishning maqsadi 4 elementli zanjirning pastki tartibli panjarasining tuzilishini va uning (kvazi)tenglama nazariyasining xususiyatlarini o’rganish uchun [2] ish natijalarining umumlashtirishlarini topishdir.

1 Частично упорядоченные множества и решетки

Определение 1.1 (Ч. у. множество). Частично упорядоченное (ч. у.) множество $\langle A; \leq\rangle$ состоит из непустого множества A (носителя) и бинарного отношения $\leq$ на нем, удовлетворяющего условиям

(рефлексивности) $a \leq a$,

(антисимметричности) если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$,

(транзитивности) если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Если отношение $\leq$ дополнительно удовлетворяет условию линейности

$a \leq b$ или $b \leq a$,

то частично упорядоченное множество называется линейно упорядочен- ным или цепью.

Определение 1.2 (Решетка как ч. у. множество). Частично упорядо- ченное множество $\langle P; \leq\rangle$ есть решетка, если sup H и inf H существуют для любого непустого конечного подмножества H множества P.

Определение 1.3 (Решетка как алгебра). Решетка — это алгебра с бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, которые удовлетворяет тождествам

(идемпотентности) $a \vee a = a,\ a \wedge a = a,$

(коммутативности) $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a,$ (ассоцативности) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ (поглощения) $a \wedge (a \vee b) = a,\ \vee (a \wedge b) = a.$

Следующее известное утверждение (см., например, [3, § I.1]) показы- вает, что два определения решетки по существу приводят к одному и тому же классу объектов. Различие обнаруживается при рассмотрении некоторых алгебраических конструкций, но во многих ситуациях можно считать решетки алгебрами или предикатными системами в зависимости от того, какое представление удобнее.

Предложение 1.4. Если ч. у. множество $\langle P; \leq \rangle$ является решеткой в смысле определения 1.2, то алгебра $\langle P; \vee, \wedge \rangle$ является решеткой в смысле определения 1.3, где $a \vee b = \sup\{a, b\}$ и $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Обратно, если алгебра $\langle P; \vee, \wedge \rangle$ является решеткой в смысле опре- деления 1.3, то ч. у. множество $\langle P; \leq \rangle$ является решеткой в смысле определения 1.2, где $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = a \wedge b$.

1.1 Решеточные тождества

В условиях для частичного и линейного порядка, а также тождествах из определения 1.3 подразумевается, что они выполняются для всех эле- ментов a, b и c носителя. Вообще, в универсальной алгебре тождеством называют универсальное предложение вида

$\forall \bar{x}\, p(t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x})),$

где $\bar{x}$ — кортеж переменных $(x_1, \ldots, x_m)$, p — n-местный предикатный символ или 2-местный символ равенства =, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы от пере- менных из $\bar{x}$. Часто при записи тождеств кванторы всеобщности опуска- ются (что, например, сделано в определениях выше).

Важную роль в теории решеток играют тождества дистрибутивности и модулярности:

(дистрибутивность) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$

(дистрибутивность) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$

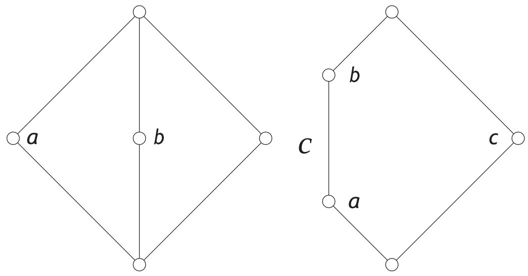
(модулярность) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$

Многообразие дистрибутивных решеток, определяемое любым из эквивалентных тождеств дистрибутивности, является наименьшим нетри- виальным многообразием решеток. Оно содержит все цепи и решетку подмножеств произвольного множества. Тождеству модулярности удо- влетворяют решетки нормальных подгрупп групп и идеалов колец (см., например, [4]).

Характеризация дистрибутивных и модулярных решеток может быть найдена, например, в [3, § II.1].

Предложение 1.5. Решетка модулярная тогда и только тогда, когда в нее не вложима решетка N_5. Модулярная решетка дистрибутивная тогда и только тогда, когда в нее не вложима решетка M_3.

Решетки M_3 (диамант) и N_5 (пентагон) изображены на следующем рисунке (M_3 слева, N_5 справа). На элементах a, b и c, нарушаются тож- дества дистрибутивности и модулярности соответственно.



Более слабыми, чем тождества дистрибутивности, являются тожде- ства n-дистрибутивности, введенные в [5].

Определение 1.6. Решётка L называется n-дистрибутивной, если для любых x, $y_1, \ldots, y_n \in L$ выполняется равенство

$$a \wedge \bigvee_{0\le i\le n} b_i = \bigvee_{0\le j\le n} \Big(a \wedge \bigvee_{0\le i\le n,\ i\ne j} b_i \Big). \qquad (1)$$

Непосредственно из определения видно, что при $n = 1$ получается тождество дистрибутивности и для $n \geqslant 1$ любая n-дистрибутивная ре- шетка является $(n + 1)$-дистрибутивной.

1.2 <u>Решетки подпорядков</u>

Для любого частично упорядоченного множества $\langle P; \leq \rangle$ рассмотрим ре- шетку подпорядков, т. е. рефлексивных, антисимметричных и транзи- тивных бинарных отношений $\sqsubseteq$ на P таких, что $x \sqsubseteq y$ влечет $x \leq y$

для любых $x, y \in P$. Порядок определяется включением отношений как множеств пар элементов множества P. Если рассматривать такую ре- шетку как алгебру, то нетрудно увидеть, что операция $\wedge$ совпадает с теоретико-множественным пересечением, но операция $\vee$ не совпадает с теоретико-множественным объединением (требуется транзитивное замы- кание объединения).

Покажем на примере 3-элементной цепи построение ее решетки под- порядков L_3 (см. также [2]). Этот пример позволит обратить внимание на специальные элементы, важные для описание результатов дипломной работы.

Пример 1.7. Пусть $P = \{0,1,2\}$, где $0 < 1 < 2$. Тогда порядок на P

состоит из пар

$$(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,2), (0,2).$$

Первые три из них будут принадлежать любому подпорядку в силу ре- флексивности. Значит, любой подпорядок определяется тем, какие из оставшихся пар принадлежат ему. В частности, носитель решетки L_3 состоит не более чем из восьми элементов.

Два из этих элементов легко указать: это диагональное отношение Δ, состоящее только из трех первых пар (наименьший элемент), и весь ис- ходный частичный порядок $\leq$(наибольший элемент).

Также нетрудно указать атомы решетки L_3, т. е. элементы, покры-

вающие наименьший. Каждый из них содержит три диагональные пары и еще одну пару из исходного частичного порядка. Значит, в решетке L_3 три атома. Обозначим их следующим образом:

$$x = \Delta \cup \{(0,1)\},\ y = \Delta \cup \{(1,2)\},\ z = \Delta \cup \{(0,2)\}.$$

Для двух пар атомов применение операции $\vee$ приводит к теоретико-множественному объединению. Действительно, $x \vee z = \Delta \cup \{(0,1),(0,2)\}$

и $y \vee z = \{(1,2),(0,2)\}$. В силу транзитивности из $0 \sqsubseteq 1$ и $1 \sqsubseteq 2$ следует, что $0 \sqsubseteq 2$. Поэтому $\leq = x \vee y \neq x \cup y$. Ясно, что $(x \vee z) \vee (y \vee z) = \leq$ и $(x \vee z) \wedge (y \vee z) = z$.

Таким образом, решетка L_3 подпорядков 3-элементной цепи состоит

из семи элементов, каждый из которых является точной верхней гранью некоторого множества атомов. В частности, множество $\vee$-неразложимых (т. е. не представимых в виде $c = a \vee b$, где $c \notin \{a, b\}$) элементов совпада- ет со множеством атомов решетки. Операция $\vee$ решетки L_3 описывается следующей таблицей (нижняя половина не требуется в силу коммутатив- ности):

$\cup$	x	y	z
x	x	$x \cup y \cup z$	$x \cup z$
y	—	y	$y \cup z$
z	—	—	z

В силу сказанного выше среди $\vee$-неразложимых элементов есть про- стые (т. е. не получающиеся из «более простых» с помощью операции теоретико-множественного объединения), для которых $c \leq a \vee b$ влечет

$c \leq a$ или $c \leq b$. Это атомы x и y. Атом ($\vee$-неразложимый элемент) z

простым не является.

Также заметим, что любой элемент решетки L_3 является точной верх- ней гранью $\vee$-неразложимых элементов; более того, любое представление элемента в таком виде можно «уточнить», т. е. свести к представлению в виде точной верхней грани семейства простых атомов, являющихся под- порядками тех элементов, которые были использованы в представлении.

1.3 Специальные элементы решеток

Приведем более строгие определения, связанные с наблюдениями из при- мера 1.7 и следующего за ним обсуждения (см., например, [2]). Везде считаем, что L — конечная решетка, т. е. ее носитель — конечное мно- жество.

Определение 1.8. Элемент p решётки L называется простым, если он не является наименьшим и для любых $a, b \in L$ из условия $p \leq a \vee b$ следует, что или $p \leq a$, или $p \leq b$.

Элемент $q \in L$ называется $\vee$-неразложимым (или просто неразло-

жимым, так как другие виды неразложимости использоваться не бу- дут), если он не является наименьшим и для любых $a, b \in L$ из условия

$q = a \vee b$ следует, что или $q = a$, или $q = b$.

Определение 1.9. Для подмножеств A и B (носителя) решетки L пи- шем $A \ll B$ и говорим, что A уточняет B, если для каждого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leq b$.

Для элемента $x \in L$ непустое подмножество $A \subseteq L$ назовем покры- тием, если $x \leq \bigvee A = \bigvee_{a \in A} a$.

Покрытие A элемента $x \in L$ минимальное, если $A \subseteq B$ для любого

покрытия B элемента x такого, что $B \ll A$.

Решетка L называется J-решеткой, если любой элемент $x \in L$ явля- ется точной верхней гранью некоторого множества неразложимых в L элементов и любое покрытие неразложимого элемента можно уточнить до минимального.

Пример 1.10. В решетках подпорядков частично упорядоченного множе- ства $(A, \leq)$ неразложимыми элементами являются атомы, т. е. подпоряд- ки вида

$$R_{ab} = \{(x, x) : x \in A\} \cup \{(a, b)\}, \qquad a \leq b, \qquad (2)$$

и только они.

Не все из них простые. Например, в решетке L_3 неразложимые под- порядки x и y простые, а неразложимый подпорядок z простым не яв- ляется, так как $z \subseteq x \vee y$, но $z \not\trianglelefteq x$ и $z \not\trianglelefteq y$.

Ясно, что любой подпорядок $\sqsubseteq$ можно представить в виде

$$\sqsubseteq = \bigcup_{a \sqsubseteq b} R_{ab},$$

т. е. в решетке подпорядков любой элемент является точной верхней гра- нью подходящего множества неразложимых элементов. Так как просты- ми элементами такой решетки являются подпорядки R_{ab}, соответствую- щие покрытиям исходного ч. у. множества (т. е. $a < b$ и не существует элементов c таких, что $a < c < b$), любое покрытие неразложимого эле- мента уточняется до минимального, состоящего из простых элементов.

2 Полученные результаты

Задача данной работы — описание решетки L_4 подпорядков 4-элементной цепи и поиск тождеств, истинных в этой решетке. Пусть $P = \{0, 1, 2, 3\}$, где $0 < 1 < 2 < 3$.

Заметим, что для множества из трех или более элементов решетки подпорядков L_3 точная верхняя грань равна точной верхней грани не более чем двухэлементного подмножества, т. е. для любых u, v и w вы- полняется условие $u \vee v \vee w \in \{u \vee v, v \vee w, u \vee w\}$. Значит, решетка L_3 является 2-дистрибутивной.

Обозначим $a = x$, $b = x \cup z$, $c = y$. Нетрудно видеть, что подрешет- ка решетки L_3, порожденная этими элементами, изоморфна решетке N_5. Значит, решетка L_3 не модулярная (и, следовательно, не дистрибутив- ная). Более детальное описание решетки L_3, включающее базис ее тож- деств, можно найти в [2]. Уже из приведенных выше наблюдений полу- чаем следующее простое свойство решетки L_4.

Предложение 2.1. Решетка L_4 не модулярная и, следовательно, не дистрибутивная.

Доказательство. Рассмотрим подпорядки $\sqsubseteq$ линейного порядка $\leq$ на P такие, что 0, 1, 2 $\not\sqsubseteq$ 3. Они образуют подрешетку решетки L_4, изоморф- ную ранее рассмотренной решетке L_3. Так как тождества сохраняются при переходе к подрешеткам, решетка L_4 не может быть модулярной (и, следовательно, дистрибутивной).

Как и ранее, обозначим через Δ множество из четырех диагональ- ных пар, образующее наименьший подпорядок. Множество пар из $\leq$, не входящих в Δ, состоит из шести элементов. Значит, решетка L_4 состоит не более чем из 64 элементов.

Фиксируя поочередно каждый элемент из P и рассматривая подпо-

рядки, для которых он не сравним ни с одним из оставшихся элементов, получим четыре подрешетки L_4, изоморфные L_3. Заметим, то некоторые подпорядки могут входить в две или более таких подрешеток, а некото- рые — ни в одну из них.

Как и в случае решетки L_3, для некоторых пар элементов точная верхняя грань не совпадает с теоретико-множественным объединением. Обозначим

$$x = \Delta \cup \{(0,1)\},\ y = \Delta \cup \{(1,2)\},\ z = \Delta \cup \{(0,2)\}, \qquad (3)$$
$$u = \Delta \cup \{(2,3)\},\ v = \Delta \cup \{(1,3)\},\ w = \Delta \cup \{(0,3)\}.$$

К соотношению $x \vee y = x \vee y \vee z \neq x \cup y$ добавляются еще три:

$$x \vee v = x \vee v \vee w,\quad z \vee u = z \vee u \vee w,\quad y \vee u = y \vee u \vee v.$$

Более того, точную верхнюю грань $x \vee y \vee u$ трех элементов нельзя пред- ставить в виде точной верхней грани никакого двухэлементного множе- ства и выполняется равенство

$$x \vee y \vee u = x \vee y \vee z \vee u \vee v \vee w = \leq. \qquad (4)$$

Следовательно, строение решетки L_4 гораздо сложнее, чем строение ре- шетки L_3. Следующий факт показывает, что это так и с точки зрения тождеств, истинных в решетке.

Предложение 2.2. Решетка L_4 не является 2-дистрибутивной.

Доказательство. Рассмотрим элемент $w \wedge (x \vee y \vee u)$. В силу (4) он равен w.

Рассмотрим элементы $w \wedge (x \vee y)$, $w \wedge (x \vee u)$ и $w \wedge (y \vee u)$. Так как ранее отмечено, что пара (0, 3) не принадлежит ни одному из подпорядков $x \vee y$,

$x \vee u = x \cup u$ и $y \vee u$, заключаем, что все три рассматриваемых элемента равны Δ, откуда $(w \wedge (x \vee y)) \vee (w \wedge (x \vee u)) \vee (w \wedge (y \vee u)) = \Delta \neq w$.

Таким образом, тождество 2-дистрибутивности (1) нарушается при

$a = w$ и $\{b_1, b_2, b_3\} = \{u, x, y\}$. □

Предложение 2.3. Решетка L_4 является 3-дистрибутивной. Доказательство. Заметим, что в (3) простыми элементами являются x,

y и u, а для остальных выполняются соотношения

$$z \subseteq x \vee y, \qquad v \subseteq y \vee v, w \subseteq x \vee y \vee u.$$

Так как для любого подпорядка покрытием является семейство нераз- ложимых подпорядков, представление $a \subseteq b_0 \vee \cdots \vee b_n$ можно уточнить до представления $a \subseteq c_0 \vee c_1 \vee c_2$, где $\{c_0, c_1, c_2\} \subseteq \{u, x, y\}$. По следствию 2 из [2] заключаем, что решетка L_4 является 3-дистрибутивной.

Аналогичными рассуждениями несложно показать, что найденные свойства □ переносятся и на случай решеток подпорядков цепей с большим числом элементов.

Предложение 2.4. Решетка подпорядков n-элементной цепи являет- ся $(n-1)$-дистрибутивной, но не $(n-2)$-дистрибутивной.

Доказательство. Достаточно заметить, что простых элементов ровно

$n-1$ и провести рассуждения, аналогичные приведенным ранее для доказательства 3-дистрибутивности, но не 2-дистрибутивности решет- ки L_4.

Предложение 2.5. Тождество C □

$$C = [\, x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1) \,] =$$
$$\bigvee_i [\, x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1) \,] \vee$$
$$\bigvee_i [\, x \wedge z_i \wedge (y_0 \vee y_1) \,] \vee$$
$$\bigvee_i [\, x \wedge ((y_0 \wedge z_i) \vee (y_1 \wedge z_{1-i})) \,],-i))],$$

истинное в L_3, не является истинным в L_4.

Доказательство. По теореме 12 из [2] тождество (C) истинно в L_3. В решетке L_4 рассмотрим два покрытия неразложимого элемента $w = \Delta \cup$

$\{(0,3)\}$:

$$w \subseteq x \vee v, \qquad w \subseteq z \vee u.$$

Так как x, v, z и u — атомы. Не существует покрытий $\{c_0, c_1\}$ элемента w, одновременно уточняющих оба приведенных выше покрытия. По лемме 4 из [2] тождество (C) ложное в L_4.

□

3 Заключение

В работе установлено, что два из трех тождеств, составляющих базис тождеств решетки L_3, нарушаются в решетке L_4. В частности, многооб- разие, порожденное L_3, является собственным подмногообразием много- образия, порожденного L_4.

Для тождества 2-дистрибутивности найдена замена в виде тождества 3-дистрибутивности и установлено, что с ростом длины цепи n в решетке подпорядков становятся ложными тождества $(n-2)$-дистрибутивности, но остаются истинными более слабые тождества $(n-1)$-дистрибутивности.

Для тождества (C) установлено, что оно нарушается в решетке L_4,

но не найден истинный аналог.

Для оставшегося тождества (N^1_3) неизвестно, остается ли оно истин- ным в решетке L_4. Никакие новые тождества для L_4 также не были найдены.

Список литературы

[1] D. Bredikhin and B. Schein, Representation of ordered semigroups and lattices by binary relations, Colloq. Math. 39 (1978), 1–12.

[2] A. O. Basheeva, M. V. Schwidefsky, and K. D. Sultankulov, The quasivariety **SP**(L_6). I. The equational basis, Siberian Electron. Math. Reports 19 (2022), 902–911.

[3] Г. Гретцер, Общая теория решеток, М.: Мир, 1982.

[4] А. В. Кравченко, М. В. Швидефски, Универсальная алгебра и теория решеток, Новосибирск: НГТУ, 2019.

[5] A. P. Huhn, Schwach distributive Verbände. I, Acta Sci. Math. 33 (1972), 297–305.